Asymptotics for ever

15 novembre 2016

1 Etude d'une somme

Soit, pour $n \in \mathbf{N}$, $d_n = n! \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k!}$.
a) Trouver la limite l de d_n.
b) Donner une développement limité de $d_n - l$ suivant l'échelle $\frac{1}{n^p}$ à la précision $\frac{1}{n^3}$.

2 Fonctions réciproques

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}^+$ par $f(x) = xe^x$.
a) Montrer que f est un C^∞- difféomorphisme de $\mathbf{R}^+$ sur lui-même ; soit g son inverse.
b) Donner un DL à l'ordre 3 de g en 0.
c) On note désormais $x_n = g(n)$.
Donner un équivalent de x_n, puis un développement asymptotique de x_n avec trois termes significatifs.

3 Etude d'extrema

On se propose d'estimer, pour $n \in \mathbf{N}^*$, n grand, le module maximum $\mu_n = \|P_n\|_{\infty,[0,n]}$ du polynôme

$$P_n(x) = \prod_{i=0}^{n}(X - i)$$

sur le segment $[0, n]$.
a) Pour $i \in \{0, ..., n-2\}$, on pose $\mu_{i,n} = \sup\limits_{x \in [i,i+1]} |P_n(x)|$. Montrer que $\mu_{i,n}$ est atteint en un point unique et que, pour $1 \leq i \leq n-2$, on a $\mu_{i,n} \leq \frac{(n-1)!}{2}$. En déduire que, pour $n \geq 4$, μ_n est atteint en $a_n \in]0, 1[$.
b) En considérant $F = \frac{P_n'}{P_n}$ montrer que $\frac{1}{a_n} \sim \ln n$. Prouver enfin que $\mu_n \sim \frac{n!}{e \ln n}$.

4 Suite de racines

Soit $P_n(X) = \frac{X^n}{n!} + \frac{X^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + X + 1$.

a) Montrer que P_n admet au plus une racine réelle. Préciser selon la parité de n.

b) Soit a_k l'unique racine réelle de P_{2k+1}. Déterminer $\lim_{k\to+\infty} a_k$.

c) Montrer l'encadrement :

$$2\frac{a_n^{2n+2}}{(2n+3)!} \le e^{a_n} \le \frac{a_n^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

d) En utilisant la formule de Stirling montrer que $a_n \sim -2\alpha n$ où α est l'unique racine de $\alpha + \ln \alpha = -1$.

Asymptotics for ever

13 septembre 2016

1 Etude d'une somme

Soit, pour $n \in \mathbf{N}$, $d_n = n! \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k!}$.
a) Trouver la limite l de d_n.
b) Donner une développement limité de $d_n - l$ suivant l'échelle $\frac{1}{n^p}$ à la précision $\frac{1}{n^3}$.

1.1 Corrigé.

a) A partir du troisième les termes composant la somme d_n sont plus petits que $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$. Donc $d_n - 1$ est positive majorée par $\frac{1}{n+1} + \frac{n-1}{(n+1)(n+2)}$ et par suite d_n tend vers 1.
b) On adapte la méthode précédente : le quatrième terme de d_n est en $\frac{1}{n^4}$ et les suivants sont bornés par $\frac{1}{n^5}$, donc

$$d_n = 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + O(\frac{1}{n^4})$$

on développe alors chacun des trois termes sur l'échelle des $\frac{1}{n^p}$ (attention au terme en $\frac{1}{n^2}$ et $\frac{1}{n^3}$ dans le DL de $\frac{1}{n+1}$ et $\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n^2}(1+1/n)^{-1}(1+2/n)^{-1} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3} + O(\frac{1}{n^4})$) pour obtenir

$$d_n = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3} + O(\frac{1}{n^4}).$$

2 Fonctions réciproques

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}^+$ par $f(x) = xe^x$.
a) Montrer que f est un C^∞- difféomorphisme de $\mathbf{R}^+$ sur lui-même ; soit g son inverse.
b) Donner un DL à l'ordre 3 de g en 0.
c) On note désormais $x_n = g(n)$.
Donner un équivalent de x_n, puis un développement asymptotique de x_n avec trois termes significatifs.

2.1 Corrigé

a) La fonction f est de classe C^∞ selon les théorèmes opératoires usuels ; comme $f' : x \to e^x + xe^x$ est strictement positive sur $\mathbf{R}^+$, f est bien un C^∞-

difféomorphisme de $\mathbf{R}^+$ sur $f(\mathbf{R}^+) = \mathbf{R}^+$.
b) La fonction, de classe C^∞, possède un DL à droite de 0 à tout ordre, soit $g(y) = g'(0)y + by^2 + cy^3 + O(y^4)$. Puisque $f'(0) = 1$, $g'(0) = 1$; puis de $f(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{2}$ et de $\forall x \in \mathbf{R}^+$, $g(f(x)) = x$ on déduit après remplacement que $a = -1$ et $b = \frac{3}{2}$.
c) Par définition $f(x_n) = n$ et après passage au ln, $x_n + \ln x_n = \ln n \quad (*)$. Comme visiblement x_n tend vers $+\infty$, $\ln x_n$ est négligeable devant x_n : x_n est équivalent $\ln n$, et tous deux tendent vers $+\infty$.
On remplace alors dans l'égalité $(*)$ pour obtenir, correctement : $x_n = \ln n - \ln(\ln n) + o()$. Reste à obtenir le dernier terme, ce qui s'obtient encore en remplaçant $\ln(x_n)$ par sa nouvelle valeur dans $(*)$, en écrivant - la méthode est importante ! - $\ln(\ln n - \ln(\ln n) + o()) = \ln(\ln n) + \ln(1 - \frac{\ln(\ln n)}{\ln n} + o()) = \ln(\ln n) - \frac{\ln(\ln n)}{\ln n} + o(...)$.Bref :

$$x_n = \ln n - \ln(\ln n) + \frac{\ln(\ln n)}{\ln n} + o(...).$$

3 Etude d'extrema

On se propose d'estimer, pour $n \in \mathbf{N}^*$, n grand, le module maximum $\mu_n = \|P_n\|_{\infty,[0,n]}$ du polynôme

$$P_n(x) = \prod_{i=0}^{n}(X - i)$$

sur le segment $[0, n]$.
a) Pour $i \in \{0, ..., n-1\}$, on pose $\mu_{i,n} = \sup_{x\in[i,i+1]} |P_n(x)|$. Montrer que $\mu_{i,n}$ est atteint en un point unique et que, pour $1 \leq i \leq n-2$, on a $\mu_{i,n} \leq \frac{(n-1)!}{2}$. En déduire que, pour $n \geq 4$, μ_n est atteint en $a_n \in]0, 1[$.
b) En considérant $F = \frac{P_n'}{P_n}$ montrer que $\frac{1}{a_n} \sim \ln n$. Prouver enfin que $\mu_n \sim \frac{n!}{e \ln n}$.

3.1 Corrigé

a) Le théorème de Rolle montre que P_n' est scindé à racines simples, et possède une racine et une seule dans chacun des intervalles $[i, i+1]$. L'étude des variations de $(-1)^{n-i}P_n$ montre alors que ce dernier possède un maximum absolu et un seul dans $[i, i+1]$, d'où le résultat.
Pour majorer $\mu_{i,n}$ lorsque $i \geq 2$, on observe que pour $x \in [i, i+1]$:
$|x - i|(i + 1 - x) \leq \frac{1}{4}$, $|x - j| \leq i + 1 - j$ lorsque $j \leq i - 1$ et enfin pour $j \geq i+2$, $|x-j| \leq j+1-i$. En regroupant les termes du produit $|P_n(x)|$ il vient $|P_n(x)| \leq \frac{1}{4}((i+1)!((n-i)!$ d'où l'estimation demandée lorsque $i = 1$; pour $i \geq 2$, $\frac{1}{4}((i+1)!((n-i)! \leq \frac{1}{2}(n-1)!$ équivaut à $(n-i)\cdots 3 \leq (n-1)\cdots(i+2)$, ce qui est .
Prenons $x = \frac{1}{2}$ il vient $\mu_{0,n} \geq u_n = \frac{1}{4}(n-1/2)....(2-1/2)$. Si $v_n = \frac{1}{2}(n-1)!$, on a $u_4 \geq v_4$ et comme $\frac{u_{n+1}}{u_n} = n + 1/2 \geq n = \frac{v_{n+1}}{v_n}$, u_n est toujours plus grand que v_n, donc pour $n \geq 4$ μ_{0n} est plus grand que μ_{in}.

b) On part de

$$0=\frac{P_n'(a_n)}{P(a_n)}-\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{a_n-i}$$

pour obtenir

$$\frac{1}{a_n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i-a_n}>\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$$

où la somme de droite tend vers $+\infty$. De là, a_n tend vers 0. Pour n assez grand, $a_n<1/2$ et donc

$$2+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}\geq 2+\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i-1/2}\geq\frac{1}{a_n}>\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$$

et comme les deux membres sont équivalents à $\ln n$, on a bien $a\sim\frac{1}{\ln n}$.
Pour finir, on écrit

$$\mu_n=\frac{n!}{a_n}\prod_{i=1}^{n}(1-\frac{a_n}{k}).$$

Notant b_n le produit ci-dessus il vient

$$\ln b_n=\sum_{k=1}^{n}\ln(1-\frac{a_n}{k})=a_n(-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{c_k}{k^2})$$

où la suite c_k est bornée. Comme la série $\sum\frac{c_k}{k^2}$ converge, que $a_n\sim\frac{1}{\ln n}$ et que $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sim\ln n$, $\ln b_n$ tend vers -1 et b_n vers $\frac{1}{e}$, ce qui donne l'équivalent souhaité de μ_n.

4 Suite de racines

Soit $P_n(X)=\frac{X^n}{n!}+\frac{X^{n-1}}{(n-1)!}+\ldots+X+1$.
a) Montrer que P_n admet au plus une racine réelle. Préciser selon la parité de n.
b) Soit a_k l'unique racine réelle de P_{2k+1}. Déterminer $\lim_{k\to+\infty}a_k$.
c) Montrer l'encadrement :

$$2\frac{a_n^{2n+2}}{(2n+3)!}\leq e^{a_n}\leq\frac{a_n^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

d) En utilisant la formule de Stirling montrer que $a_n\sim-2\alpha n$ où α est l'unique racine de $\alpha+\ln\alpha=-1$.

4.1 Corrigé

a) On raisonne par récurrence sur $n\in\mathbf{N}$, en prenant une hypothèse de récurrence suffisamment forte notée H_n :
"P_{2n} est strictement positif et P_{2n+1} croît strictement de $-\infty$ à $+\infty$."
H_0 est clairement vérifiée, et si H_n l'est, de $P_{2n+2}'=P_{2n+1}$ on déduit après étude

- élémentaire - des variations fondée sur l'hypothèse de récurrence concernant P_{2n+1} que P_{2n+2} possède un minimum absolu en l'unique zéro a_n de P_{2n+1}. Comme

$$P_{2n+2}(a_n) = P_{2n+1}(a_n) + \frac{a_n^{2n+2}}{(2n+2)!} = \frac{a_n^{2n+2}}{(2n+2)!} > 0$$

le polynôme P_{2n+2} est strictement positif; de $P'_{2n+3} = P_{2n+2}$ on déduit que le polynôme de degré impair P_{2n+3} est strictement croissant, ce qui achève la récurrence.
La clé des questions suivantes est l'égalité de Mac-Laurin :

$$\forall (n, x) \in \mathbf{N} \times \mathbf{R}, e^x - P_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^c$$

où c est compris entre x et 0. De là, pour x négatif : $|e^x - P_n(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.
b) Clairement, tous les a_k sont strictement négatifs. S'il existe $A > 0$ tel que, pour tout k appartenant à un sous-ensemble infini X de $\mathbf{N}$ on ait $-A < a_k < 0$, il vient avec l'inégalité ci-dessus :

$$\forall n \in X, |P_{2n+1}(a_n) - e^{a_n}| < \frac{A^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

ce qui montrer que la suite e^{a_n} tend vers 0, alors qu'elle est minorée par e^{-A}, c'est absurde. Donc la suite a_k tend vers $-\infty$.
c) L'égalité de Mac-Laurin ci-dessus montre que, pour x réel strictement négatif, e^x est compris strictement entre $P_{2n+3}(x)$ et $P_{2n+2}(x)$. En appliquant ceci avec $x = a_n$, et moyennant le fait que $P_{2n+1}(a_n) = 0$, nous obtenons

$$\frac{a_n^{2n+2}}{(2n+3)!}(2n+3+a_n) \leq e^{a_n} \leq \frac{a_n^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

Il ne reste plus qu'à prouver que $a_n + 2n + 3 \geq 2$, or on montre facilement par récurrence que $P(-2n-1) \leq 0$ - ce qui donne $a_n \geq 2n - 1$ et le résultat - pour tout n : c'est vrai pour $n = 0$, et si $P(-2n-1) \leq 0$ il vient

$$P_{2n+3}(-2n-3) = P_{2n+1}(-2n-3) \quad \text{(petit miracle)} \quad \leq P_{2n+1}(-2n-1) \leq 0$$

AQT

d) Un dernier effort ! Prenons le Log de l'inégalité que nous venons d'établir, compte-tenu de la formule de Stirling $\ln n! = n \ln n - n + o(n)$ nous obtenons après quelques calculs aussi légers que passionnants :

$$(2n+2)\ln\frac{-a_n}{2n+2} + 2n + 2 + o(n) \leq a_n \leq (2n+2)\ln\frac{-a_n}{2n+2} + 2n + 2 + o(n)$$

ce qui montre que la suite $u_n = \frac{-a_n}{2n+2}$ vérifie :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n + \ln u_n = 1,$$

or $f : x \to x + \ln x$ est une bijection bicontinue de $]0, +\infty[$ sur $\mathbf{R}$, la continuité de f^{-1} amène enfin : u_n tend vers α.